第17講・2次方程式の解き方

例題 1　平方根を利用する解き方①

問題

次の方程式を解きなさい。

(1) $x^2 = 16$

(2) $2x^2 = 12$

(3) $x^2 - 18 = 0$

(4) $25x^2 - 9 = 0$

ポイント

● $x^2 = k$ $(k > 0)$ の形をした 2 次方程式
→ 両辺の**平方根**を考えると，$x = \pm\sqrt{k}$ と変形できる。

解答

(1) $x = \pm 4$ …(答)

(2) $2x^2 = 12$
$x^2 = 6$
$x = \pm\sqrt{6}$ …(答)

(3) $x^2 - 18 = 0$
$x^2 = 18$
$x = \pm 3\sqrt{2}$ …(答)

(4) $25x^2 - 9 = 0$
$25x^2 = 9$
$x^2 = \dfrac{9}{25}$
$x = \pm\dfrac{3}{5}$ …(答)

MEMO

確認テスト 1

次の方程式を解きなさい。

(1) $x^2 = 1$

(2) $3x^2 = 6$

(3) $5x^2 - 80 = 0$

(4) $4x^2 - 3 = 0$

例題 2 平方根を利用する解き方②

問題

次の方程式を解きなさい。

(1) $(x - 6)^2 = 4$

(2) $(x + 3)^2 - 2 = 0$

(3) $2(x - 6)^2 = 98$

ポイント

● $(x + m)^2 = n$ $(n > 0)$ の形をした 2 次方程式

→ かっこの中をひとまとまりとみて，両辺の平方根を考えると，$x + m = \pm\sqrt{n}$ と変形できる。

解答

(1) $(x - 6)^2 = 4$

$x - 6 = \pm 2$

$x = 6 \pm 2$

$x = \mathbf{4, 8}$　**…(答)**

(2) $(x + 3)^2 - 2 = 0$

$(x + 3)^2 = 2$

$x + 3 = \pm\sqrt{2}$

$x = \mathbf{-3 \pm \sqrt{2}}$　**…(答)**

MEMO

(3) $2(x-6)^2 = 98$

$(x-6)^2 = 49$

$x-6 = \pm 7$

$x = 6 \pm 7$

$x = \mathbf{-1,\ 13}$　**・・・(答)**

確認テスト 2

次の方程式を解きなさい。

(1) $(x+3)^2 = 25$

(2) $(x-5)^2 - 3 = 0$

(3) $3(x+4)^2 - 300 = 0$

例題 3　解の公式を利用する解き方

ポイント

● 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

計算のしくみ

$$2x^2 + 5x + 1 = 0$$
$$x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$
$$x^2 + \frac{5}{2}x = -\frac{1}{2}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

両辺に x の係数の $\frac{1}{2}$ の 2 乗を加える。

$$x^2 + \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{5}{4}\right)^2$$
$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{17}{16}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

両辺の平方根をとる。

$$x + \frac{5}{4} = \pm\frac{\sqrt{17}}{4}$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

問題

次の方程式を解きなさい。

(1)　$x^2 + 3x - 2 = 0$

(2)　$2x^2 + 3x - 4 = 0$

(3)　$6x^2 + 7x - 3 = 0$

(4)　$x^2 - 8x + 4 = 0$

解答

(1) 解の公式より

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}$$
$$=\frac{-3\pm\sqrt{9+8}}{2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}}\quad\cdots\textbf{(答)}$$

(2) 解の公式より

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times2\times(-4)}}{2\times2}$$
$$=\frac{-3\pm\sqrt{9+32}}{4}$$
$$=\boldsymbol{\frac{-3\pm\sqrt{41}}{4}}\quad\cdots\textbf{(答)}$$

(3) 解の公式より

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\times6\times(-3)}}{2\times6}$$
$$=\frac{-7\pm\sqrt{121}}{12}$$
$$=\frac{-7\pm11}{12}$$
$$=\boldsymbol{-\frac{3}{2},\ \frac{1}{3}}\quad\cdots\textbf{(答)}$$

(4) 解の公式より

$$x=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\times1\times4}}{2\times1}$$
$$=\frac{8\pm\sqrt{48}}{2}$$
$$=\frac{8\pm4\sqrt{3}}{2}$$
$$=\boldsymbol{4\pm2\sqrt{3}}\quad\cdots\textbf{(答)}$$

MEMO

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$a=$　　$b=$　　$c=$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$a=$　　$b=$　　$c=$

確認テスト 3

次の方程式を解きなさい。

(1) $x^2 - x - 3 = 0$

(2) $3x^2 - 5x + 1 = 0$

(3) $7x^2 + x - 6 = 0$

(4) $3x^2 + 4x - 8 = 0$

例題 4　因数分解を利用する解き方

ポイント

● 2 次方程式 $(x - a)(x - b) = 0$ $(a \fallingdotseq b)$ の解は

$x = a, b$

計算のしくみ

$(x - a)(x - b) = 0 \rightarrow x - a = 0$ または $x - b = 0$

よって，$x = a$ または $x = b$

問題

次の方程式を解きなさい。

(1) $(x + 1)(x - 6) = 0$

(2) $x^2 - 3x + 2 = 0$

(3) $x^2 - 6x = 0$

(4) $x^2 + 2x + 1 = 0$

解答

(1) $x = \mathbf{-1, 6}$　…(答)

(2) $(x - 1)(x - 2) = 0$

$x = \mathbf{1, 2}$　…(答)

(3) $x(x - 6) = 0$

$x = \mathbf{0, 6}$　…(答)

MEMO

(4)　$(x+1)^2=0$

$x=\mathbf{-1}$　**…(答)**

確認テスト 4

次の方程式を解きなさい。

(1)　$(x-2)(x+4)=0$

(2)　$x^2-x-56=0$

(3)　$2x^2-x=0$

(4)　$x^2-6x+9=0$

例題 5　いろいろな 2 次方程式

ポイント

● 2 次方程式の解き方

1　因数分解を利用する

2　$(x+m)^2=n$ の形に変形する

3　解の公式を利用する

問題

次の方程式を解きなさい。

(1)　$-x^2-11x-30=0$

(2)　$2x^2-8x+2=0$

(3)　$(5x+3)^2=12$

(4)　$(x+1)(x+5)=-4$

解答

MEMO

(1)
$$-x^2-11x-30=0$$
$$x^2+11x+30=0$$
$$(x+5)(x+6)=0$$
$$x=\mathbf{-5,\ -6}$$ …(答)

(2)
$$2x^2-8x+2=0$$
$$x^2-4x+1=0$$

解の公式より

$$x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times1}}{2\times1}$$
$$=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}$$
$$=\mathbf{2\pm\sqrt{3}}$$ …(答)

(3)
$$(5x+3)^2=12$$
$$5x+3=\pm2\sqrt{3}$$
$$5x=-3\pm2\sqrt{3}$$
$$x=\mathbf{\frac{-3\pm2\sqrt{3}}{5}}$$ …(答)

(4)
$$(x+1)(x+5)=-4$$
$$x^2+6x+5=-4$$
$$x^2+6x+9=0$$
$$(x+3)^2=0$$
$$x=\mathbf{-3}$$ …(答)

確認テスト 5

次の方程式を解きなさい。

(1) $3x^2-15x+12=0$

(2) $4x^2+8x-20=0$

(3) $(2x-3)^2=5$

(4) $(x-4)(x+4)=-6x$